Science for Education Today

2026. Том 16. № 1 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

УДК 51.77+371+37.015.31
DOI: 10.15293/2658-6762.2601.07

Научная статья / Research Full Article
Язык статьи: русский / Article language: Russian

Изучение школьного курса математики на основе компетентностного подхода

А. Ж. Жафяров[1]

[1] Новосибирский государственный педагогический университет,
Новосибирск, Россия

Проблема и цель. *В статье рассматривается проблема повышения качества математического образования учащихся, в том числе детей с ограниченными возможностями здоровья. Цель исследования – построить изучение школьного курса математики на основе технологии компетентностного подхода, разработанного и уточненного автором, продемонстрировать сказанное на примере первых трех базисных компетенций темы «Делимость целых чисел».*

Методология. *Основой методологии является интеграция непротиворечивой теории и технологии автора о компетентностном подходе и многолетней практики по преподаванию указанной темы.*

Результаты. *Многие ученики, обученные по этой технологии, стали достойными гражданами России, докторами наук и профессорами. Целесообразность выбора этой темы обусловлена следующими обстоятельствами: она вызывает большие трудности у учителей (не только российских), студентов педвузов и, как следствие, у старшеклассников, теряющих баллы на ЕГЭ; почти нет учебных пособий, способных решить эту проблему.*

Заключение. *Внедрение компетентностного подхода в процесс изучения школьного курса математики будет способствовать повышению качества математического образования и личностного развития учащихся, тем самым содействовать подготовке кадров для решения глобальной проблемы, поставленной Президентом страны: развивать отечественную качественную экономику, опережающую зарубежную.*

Ключевые слова: *компетенция; компетентность; компетентностный подход; интеграция теории и практики.*

Финансирование проекта: Исследование выполнено в рамках реализации государственного задания Министерства просвещения Российской Федерации № 073-03-2025-062/1 по теме «Содержание и технология обучения школьников, испытывающих трудности в изучении математики в школе».

Библиографическая ссылка: Жафяров А. Ж. Изучение школьного курса математики на основе компетентностного подхода // Science for Education Today. – 2026. – Т. 16, № 1. – С. 160–180. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2601.07

✉ *Автор для корреспонденции: Акрям Жафярович Жафяров, akram39@yandex.ru*

Постановка проблемы

Как уже отмечено, перед страной поставлена очень важная глобальная проблема: развивать качественную экономику, опережающую зарубежную. Ее решение напрямую связано с вопросом: быть России или нет?

Кадры решают все. Большая сила в составе педагогики и психологии должна результативно участвовать в подготовке кадров [1–3], компетентных участвовать в решении государственных задач [4–8].

Эта статья нацелена на повышение качества математического образования учащихся, в том числе, детей с ограниченными возможностями здоровья и участников СВО, причем на основе компетентностного подхода (КП) [1] [9], но в условиях современного цифрового развития [10–15].

Это звучит парадоксально, так как почти все вузы отказались от Болонского соглашения (БС), следовательно, и от КП. Тем самым автору кажется, система образования совершила «Фейербаховскую ошибку»: «вместе с грязной водой выбросила и ребенка». Необходимо разобраться, что является «грязной водой» и «ребенком». Очевидно, что «грязной водой» является противоречивая теория о компетенциях и компетентностях. Нет ни одного непротиворечивого определения понятия «компетенция» ни у отечественных ученых, ни у зарубежных [16–22] (в английском языке вовсе не различаются эти понятия).

Публикаций по этой проблеме много[2], имеется и попытка разобраться в путанице понятий «компетенция» и «компетентность» [9]. Добросовестная группа В. Л. Цветкова с соавт.[3] правильно ответила на два вопроса из трех: правильны, что КП – стратегическая линия в подготовке профессиональных кадров, и структуры рассматриваемых понятий одинаковы (дословно: качества, принадлежащие компетентности и компетенции одни и те же). Следует особо отметить резкое различие в назначении этих понятий. Они относятся к различным категориям: компетенция – долженствование (индивидуум должен), компетентность – владение (индивидуум компетентен по данной компетенции, если он владеет ею, т. е. способен выполнить ту деятельность, которая предусмотрена соответствующей компетенцией). Без такого различия: 1) опубликованы определения компетентности и компетенции; 2) создается противоречивая теория. По теореме знаменитого немецкого ученого К. Геделя, в противоречивой системе можно доказать истинность любого предложения.

---

[1] Жафяров А. Ж. Компетентностные модели развития детей, одаренных в области математики // Сибирский педагогический журнал. – 2012. – № 3. – С. 192–201.
Жафяров А. Ж. Элективный курс на компетентностной основе «Делимость целых чисел»: учебное пособие. – Новосибирск: НГПУ, 2013. – 102 с.

[2] Методология и технология повышения компетентности учителей, студентов и учащихся по теме «Делимость целых чисел»: монография Новосибирск: Изд. НГПУ, 2012. – 218 с. URL: http://lib.nspu.ru/views/library/2190/read.html. – ISBN 978-5-85921-908-7. 25.05.2012
Иванов А. М., Кузьмичев А. И. Делимость в кольце целых чисел: учеб. пос. – Новосибирск: НГПИ. – 1997. –140 с.
Жафяров А. Ж. Компетентностные модели развития детей, одаренных в области математики // Сибирский педагогический журнал. – 2012. – № 3. – С. 192–201.
Жафяров А. Ж. Элективный курс на компетентностной основе «Делимость целых чисел»: учебное пособие. – Новосибирск: НГПУ, 2013. – 102 с.

[3] Цветков Л. В., Хрусталева Т. А., Рожков А. А., Красноштанова Н. Н., Семчук И. В. Компетентностный подход как стратегическая линия в подготовке профессиональных кадров // Мир образования - образование в мире. – 2015. – № 1 (57). – С. 130–136.

Это и оправдывает в некоторой степени отказ системы образования России от БС. Но положение можно исправить, чтобы спасти компетентностный подход. КП является самой эффективной технологией подготовки креативно компетентностных кадров. В 1960-е годы автор работал учителем математики, учил учащихся по технологии, которую в настоящее время называют компетентностным подходом. Приведу только несколько фамилий моих учеников. Харченко Слава – много лет был Президентом всех математических университетов Мексики; Цикановский Борис – составил ЭВ-программу, освободившую химиков от рутинной работы; Фокин Михаил – много лет работал заместителем по науке директора Института математики СО РАН и деканом мехмата НГУ и т. д.

Вывод: необходимо спасать компетентностный подход, вернуть его в вузы и школы, особенно в классы с углубленным изучением математики. Это очень просто, необходимо: 1) грязную воду заменить чистой; 2) разработать конкретную технологию на основе КП для изучения школьного курса математики и внедрить ее в учебный процесс вместо обобщенных словесностей БС. Эти две проблемы автором решены, вашему вниманию будут представлены ниже.

Методология исследования

Краткая теория компетентностного подхода

Ключевыми понятиями КП являются «компетенция» и «компетентность». Приведем уточненные определения этих понятий в изложении автора.

Определение 1. Компетенция в данной реалии – это название функционирующих и будущих видов деятельности человечества и требования к ним.

Из этого определения следует: 1) человечеству придется решать конкретные проблемы не только некоторой деятельности, но и новые проблемы реальной действительности; 2) компетенция относится ко всему человечеству, а не отдельной личности; 3) вторая часть определения (и будущим…) необходима в связи с тем, что компетенций больше, чем функционирующих видов деятельности. Например, компетенция – переселение людей на другие планеты есть, нет пока такой деятельности.

Требования к компетенциям выражены четырьмя глаголами: *знать, уметь, владеть и развивать,* которые составляют методологическую основу для разработки конкретных технологий подготовки компетентных и креативно компетентных специалистов по основным компетенциям данной профессии. Поэтому основной проблемой системы образования является разработка указанных технологий и их реализация.

Определение 2. Компетентностью индивидуума в данной области деятельности человечества назовем владение им соответствующими компетенциями.

Из этого определения следует, что компетентность – это свойство конкретного человека, она относится только к личности.

Технология внедрения КП в учебный процесс состоит из трех этапов.

Первый этап – формирование базисных компетенций ОИ – объекта изучения (темы, дисциплины, УДЕ –укрупненной дидактической единицы).

Второй этап – формирование базисной компетентности, т. е. компетентности по всем базисным компетенциям ОИ. Состоит из двух шагов: шаг 1 – «учим мыслям» – реализуется на основе теории и практики; шаг 2 – «учим

2026. Том 16. № 1 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

мыслить!» – достигается на основе самостоятельного решения задач специального набора и выполнения творческих заданий, активного участия на олимпиадах, конкурсах и т. д. (здесь автором уточнено высказывание И. Канта: «Учить не мыслям, а мыслить»).

Третий этап – повышение (развитие) компетентности в целом. Имеются два вида повышения компетентности по данной базисной компетенции: первый – «внутренний» – реализуется в области темы и дисциплины; второй – «внешний» – достигается за счет интеграции данной базисной компетенции с дисциплинами как по профилю, так и вне профиля.

Первый этап – формирование базисных компетенций

Базисные компетенции должны удовлетворять определенным требованиям.

Обучающийся должен:

а) знать определения и свойства базисных понятий, на основе которых создана данная базисная компетенция; ***б) уметь*** применять данные знания для решения учебно-познавательных и практико-ориентированных задач; ***в) владеть*** в целом знаниями и умениями для решения стандартных и нестандартных задач, для постановки проблем и их решения; ***г) развивать навыки*** инновационной, творческой и исследовательской деятельности, ***непрерывно совершенствуя*** свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью в процессе изучения последующих тем данной и смежных дисциплин.

Определение 3. Обучающийся считается компетентным по данной базисной компетенции, если он владеет компетенциями а)-д) по отношению к этой компетенции.

Формирование базисных компетенций объекта изучения ОИ проще проводит через его базисные понятия. Есть и другие подходы.

Итак, **сформулирована теория и технология КП**.

Сказанное продемонстрируем на примере темы «Делимость целых чисел» (обучение на основе деятельностного подхода). Она состоит из 6 базисных компетенций (понятий, представляющих структуру этой темы): БК-1 – Определение делимости целых чисел; БК-2 – Признаки делимости; БК-3 – Деление с остатком; БК-4 – Простые, взаимно простые и составные числа; БК-5 – НОД – наибольший общий делитель; БК-6 – НОК – наименьшее общее кратное.

Структура указанной темы представлена. Осталось выяснить суть компетенций а)-г) по отношению к каждой базисной компетенции (назовем их микрокомпетенциями). Требования а)-г) к ним указаны.

На примере первой базисной компетенции БК-1 продемонстрируем их.

БК-1 – Определение делимости целых чисел

Суть микрокомпетенций **БК-1. Обучающийся должен:**

БК-1.1 – знать определение и свойства делимости целых чисел;

БК-1.2 – уметь доказывать истинность этих свойств и применять их для решения стандартных, учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

БК-1.3 – ставить проблемы и решать их, в том числе задачи: олимпиадные, ЕГЭ, для самостоятельного решения и творческих заданий;

БК-1.4 – развивать навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, **непрерывно совершенствуя** свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью.

Приступим к формированию компетентности по БК-1, начнем с изучения теории. Первым этапом является реализация первого шага «Учим мыслям» (автор, как уже отмечено, придерживается принципа: учить и мыслям, и мыслить). Достигается за счет усвоения соответствующей теории и приобретения навыков ее применения на практике.

Результаты исследования

1. Краткая теория

Определение. *Говорят, что целое число* a *делится на целое число* b *(обозначение* a⁝b*), если существует целое число* c *такое, что* a = b·c.

Свойства делимости:

1. **(a⁝b) ^ (b⁝c) => (a⁝c);**
2. **(a⁝b) ^ (c ∈Z) => (a ·c)⁝ b;**
3. **(a⁝c) ^ (b⁝c) => (a± b) ⁝c;**
4. **(a⁝b) ^ (n ∈N) =>** $a^n \vdots b^n$;
5. **(a⁝c) ^ (b⁝̸c) => (a ± b) ⁝̸c).**

2. Практика

Она состоит из трех пунктов:

2.1. Решение демонстрационных примеров;

2.2. Решение задач для самостоятельной работы;

2.3. Выполнение творческих заданий.

Некоторые задачи последних двух пунктов могут вызвать трудности у учащихся, но автор призывает их проявить упорство, привыкайте к длительной «осаде». Например, человечество на решение проблемы о параллельных прямых затратило почти 100 лет; до сих пор не дано правильного определения отличника класса (отличного стрелка); не указан правильный критерий для определения победителя среди двух конкурирующих технологий (суперактуальная в настоящее время); во многих странах шкалы для измерения успеваемости учащихся являются неправильными[4] [23; 24] и т. д. Например, в России приемлема шкала оценок 0, 1, 2, 3, 4, 5. Она является научно обоснованной, так как содержит 0 (измерение, следовательно, применение математики, начинается с 0 – это первая причина, вторая – на нормативных оценках производят 4 арифметические действия: сложение, вычитание, умножение и деление, например, при нахождении победителя среди конкурирующих технологий; такие операции можно производить только на шкале отношений – единственной шкале, содержащей обязательно 0).

Трудности учащихся при решении некоторых задач вполне сравнимы (по опыту автора и его учеников) с трудностями, которые испытывают известные ученые при своих открытиях. Привыкайте: одолевать трудности и радоваться своему успеху!

2.1. Демонстрационные примеры

Задачи этого пункта состоят из следующих 5 типов:

Тип 1 – доказательство всех свойств и решение стандартных задач (ликбез);

Тип 2 – решение задач на сообразительность;

Тип 3 – решение задач на позиционность десятичной системы исчисления;

Тип 4 – решение задач ОГЭ, ЕГЭ и олимпиадных;

Тип 5 – проявить творческий подход во всех предыдущих типах задач (подготовка к инновационной, творческой и исследовательской деятельности).

[4] Жафяров А. Ж. Критерий КЖ для исследования зависимых и независимых выборок в области экспериментальных наук: учебное пособие, 2-е издание, доп. и испр.; Новосибирский государственный педагогический университет. – Новосибирск: НГПУ, 2025. – 185 с.

Реализация названных пунктов

Тип 1. Ведущий доказывает истинность свойства, указанного коллективом. Затем доказать справедливость еще нескольких свойств общими усилиями.

Цель: убедить в обоснованности проводимых операций и приобрести навыки изложения математического текста (пропедевтика Типа 5).

В качестве разминки докажем истинность первого свойства.

Первое свойство: **(a⋮b) ^ (b⋮c) => (a⋮c).**

Условие a⋮b означает, что существует целое число k такое, что a = b·k. Далее, из условия **b⋮c** следует, что b =c·p, p ∈ Z. Тогда a = b·k = (c·p)·k = c·(p·k). Отсюда получим, что a⋮c, так как p·k ∈ Z. Первое свойство доказано.

Стандартные задачи на свойства делимости чисел

1. Найдите целые числа x и y такие, что

а) (x -5)·(y + 4) = 7;

б) (y -3)·(x·y + 4) =5.

2*. Докажите, что n^5 – n делится на n при любом натуральном n.

3. Какой цифрой оканчивается сумма всех трехзначных чисел?

Ответ: 0.

4. Докажите, что число n^5 при любом натуральном n оканчивается на ту же цифру, что и число n.

5. Найдите наименьшее трехзначное число, которое делится на 2, но не делится на 4. Ответ: 102.

6. Докажите, что если натуральные числа m и n делятся на натуральное число k, то

а) (m – n) ⋮ k;

б) (m^2 – n^2) ⋮ k^2;

в) ($m^2 \cdot n$) ⋮ k^3.

Тип 2. Приведем несколько видов таких задач.

Вид 1. На доске записаны несколько натуральных чисел. Разрешается стереть любые: а) два числа; б) 4 числа и написать вместо них их сумму. Чему равна сумма оставшихся на доске чисел после 5 и 11 операций?

Задание 1. Каждый придумывает свою задачу по этой теме, решает ее и должен быть готовым изложить свое решение перед коллективом.

Задание 2. Решите задачу в общем виде, т. е. укажите алгоритм решения указанного типа задач.

Вид 2. Даны несколько натуральных чисел. Разрешается: а) к любым двум числам добавить по 1; б) к любым трем числам добавить по 1; в) к любым двум числам добавить 1 и 2; г) к любым трем числам добавить 1, 2 и 3. Можно ли уравнять эти числа, сделав такую операцию несколько раз?

Замечание. Задания 1 и 2 остаются в силе и для этого типа.

Приведем демонстрационные примеры.

Пример 1. Даны 3 натуральных числа a_1, a_2, a_3. Можно ли уравнять эти числа, прибавив по 1 любым двум из них.

Решение. Пусть все числа являются различными. Упорядочим их по возрастанию $a_1 < a_2 < a_3$. Прибавим по 1 к первым двум числам (иначе говоря, сделаем операцию (1, 1, 0)), причем n (n= $a_3 - a_1$) раз. Тогда данная тройка имеет вид

$$(a_3, a_2 + n, a_3) \qquad (1)$$

Пусть k=$a_2 + n - a_3$. Ясно, что k – натуральное число. Применив операцию (1, 0, 1) по отношению к числам тройки (1) k раз, получим тройку с одинаковыми числами.

НИР. Решите эту задачу в случае, когда два числа совпадают.

Пример 2. Даны 4 натуральных числа a_1, a_2, a_3, a_4. Можно ли уравнять эти числа, прибавив по 1 любым двум из них.

Решение. Тройку первых чисел сделаем одинаковым методом, примененным при решении предыдущей задачи. Пусть она имеет вид: a, a, a, a_4, k=$a_4 - a$. Ясно, что k – целое число. Если k = 0, то задача решена. При k = 1 числа a, a, a, a+1 не могут быть равными ни при каких разрешенных операциях. Если k = 2, то за счет тройки операций (1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), проведенных над первыми тремя числами a, a, a, получим, что все числа равны a+2.

Далее, для k = 3 поступаем так: сначала для k = 2 находим четверку a+2, a+2, a+2, a+2; затем за счет двух операций (1, 1, 0, 0) и (0, 0, 1, 1) получаем четверку, числа которой равны a+3 и т. д.

Ответ: нет решения, если при k = 1, задача имеет решение при любом натуральном k > 1. НИР. Решите эту задачу, если k является целым отрицательным.

Тип 3. Приведем несколько таких задач.

Пример.

Во множестве цифр Q = {0, 1, 2, ..., 9} найдите решение уравнения:

а) $6\cdot\overline{abcd}=\overline{x2025}$;

б) $7\cdot\overline{abcd} = \overline{x2025}$;

в) $9\cdot\overline{abcde} = \overline{xy2025}$, x > 6.

Рассмотрим решения первых двух задач. При решении задачи а) «включим» предыдущий тип – сообразительность. Левая часть является четным числом при любом значении d, а правая часть – нечетное число. Следовательно, данное уравнение не имеет решения.

Решение задачи б). Ясно, что d = 5. Тогда данное уравнение представимо в виде $7\cdot(\overline{abc}\cdot10+5)=\overline{x202}\cdot10+5$. После преобразований оно имеет вид $7\cdot\overline{abc}+3=\overline{x202}$. Полученное уравнение не имеет решения, так как правая часть окачивается цифрой 2, а левая часть – цифрой, не меньшей трех при любом значении цифры c.

Ответ: данное уравнение не имеет решения.

Тип 4. Приведем несколько таких задач.

Пример 1. Решите в целых числах уравнение xy^2= x + 2025y.

ЦУ: приведите уравнение к виду

$x\cdot(y^2-1) = 1\cdot3^4 5^2\cdot y$;

убедитесь, что $x = y = 0 -$ решение; если (x, y) – решение, то (-x, -y) – решение; при y = 1 нет решения; далее ищем решения только для y ≥ 2, учитывая, что разность делителей y -1 и y +1 равна двум, получим: y -1=1 и y +1=3 (y = 2); y -1 = 3 и y +1 = 5 (y = 4).

Пример 2. Решите в целых числах систему $\begin{cases}2x^2+2y^2+5z^2=13,\\ x^2+y^2<5.\end{cases}$

ЦУ: 1) используя неравенство, найдите 13 целочисленных решений этого неравенства; 2) учитывая их, убедитесь, что $z^2=1$.

Пример 3 (ЕГЭ, 2015). На доске написано несколько не обязательно различных двузначных натуральных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел оказалась равной 257. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры. Приведите пример исходных чисел, для которых сумма получившихся чисел ровно в m раз больше, чем сумма исходных чисел, если: a) m = 3; b) m ≥ 4; c) найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел.

Решение. a) Задача не имеет решения, так как разность сумм чисел после перестановки и до перестановки делится на 9, а в рассматриваемом случае 3·257 – 257 = 2·257 искомая разность не делится на 9.

b) Представим данное число следующим образом: 257 = 18·13 + 23. После перестановки искомая сумма равна 81·13 + 32 = 1085. Легко заметить, что 1085 > 4·257.

Ответ: исходными числами могут быть следующие: 23 и 18, повторенное 13 раз.

c) Представим данную сумму следующим образом: 257 = 19·12 + 29. После перестановки искомая сумма равна 91·12 + 92 = 1184.

Легко заметить, что полученная сумма является наибольшей.

2.2. Задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Решите во множестве цифр следующие уравнения:

a) 8·$\overline{abc}$ = $\overline{xy25}$;

b) b) 3·$\overline{abcd}$ = $\overline{xy2025}$.

ЦУ: a) не имеет решения; b) аналогичная задача решена выше.

Пример 2. Найдите наименьшее натуральное число n = $\overline{abc}$, которое обладает свойством $\overline{bac}$ = 5·$\overline{abc}$.

Пример 3. Решите во множестве целых чисел следующие уравнения:

1) x·y + 2y + 3 = x;

2) x·y + 2y = x^2 – 4;

3) (2y + 1)·(x·y - 3) = 3.

Пример 4. Имеются контейнеры по 130 кг и по 160 кг. Сколько было контейнеров каждого вида, если известно, они вместе весят 3 тонны?

Решение. Пусть x и y – числа указанных контейнеров. Тогда 130x + 160y = 3000.

Представим это уравнение в виде: 13x = 4·(75 – 4y). Натуральное число y меняется в пределах 1 ≤ y ≤ 18. Из них только y = 9 удовлетворяет полученному уравнению.

Ответ: x = 12, y = 9.

2.3. Творческие задания

Пример 1. Во множестве цифр решите следующие уравнения:

а) $\overline{x2}$· $\overline{abc}$ = $\overline{y2025}$, если x > 7 ;

б) 125·$\overline{abc}$ = $\overline{xy125}$, x⋮3, a> 0, b – четное число;

в) $\overline{x2}$· $\overline{abcd}$ = $\overline{5y2024}$;

г) $\overline{xy2}$·$\overline{abc}$ = $\overline{9z2026}$.

Решение.

а) Это уравнение решения не имеет, так как в левой части четное число, а в правой – нечетное.

б) Представим данное уравнение в виде: 125·$\overline{abc}$ = 1000·$\overline{xy}$ + 125. Сокращая обе части этого уравнения на 125, получим

$\overline{abc}$ = 8·$\overline{xy}$ + 1 ⇔ 10·$\overline{ab}$ +c=80x + 8y +1.

Для истинности этого равенства необходимо (но недостаточно) равенство единиц c = 8y + 1. Это возможно в двух случаях:

1) y = 0, c = 1;

2) y = 1, c = 9.

Продолжайте решение самостоятельно.

Пример 2. Решите во множестве целых чисел следующие уравнения:

a) 2025y = x$y^2 - x$;

b) b) $x^2y + y = x(2025 - 2y)$.

Пример 3. Имеются верблюды трех видов: с одним горбом, двумя и тремя. Сколько было верблюдов каждого вида, если общее число горбов равно b, причем число верблюдов с одним горбом было меньше p части состава, а – число верблюдов с тремя горбами делится на четыре?

Версии: a) b = 45, p = 2\3; b) b = 45, p = 1\2.

ЦУ для a): 3a < 45, a < 15 и a ⋮ 4 , то a ∈ {4; 8; 12}.

Ответ для a). При a = 4 значение x = 33 – 2y, y ∈ {2, … , 16}, где x и y − численности верблюдов, соответственно, с одним и двумя горбами. Если a = 8, то x = 21 – 2y, y ∈ {1, … , 10}. При a = 12 значение x = 9 – 2y, y ∈ {1, … , 4}.

Выводы. 1. Индивидуум компетентен по первой базисной компетенции БК -1, если он владеет всеми микрокомпетенциями БК-1.1, …, БК-1.4.

2. Индивидуум компетентен по теме «Делимость целых чисел», если он владеет всеми базисными компетенциями БК-1, … БК-6.

БК-2 – признаки делимости целых чисел

В предыдущем пункте продемонстрирован способ изучения БК-1 – первой базисной компетенции рассматриваемой темы. Такую же процедуру проведем относительно второй базисной компетенции БК-2.

Суть микрокомпетенций **БК-2. Обучающийся должен:**

БК-2.1 – знать основные признаки делимости целых чисел;

БК-2.2 – уметь доказывать истинность этих признаков и применять их для решения стандартных, учебно-познавательных и практико-ориентированных задач;

БК-2.3 – ставить проблемы и решать их, в том числе задачи: олимпиадные, ЕГЭ, для самостоятельного решения и творческих заданий;

БК-2.4 – развивать навыки инновационной, творческой и исследовательской деятельности, **непрерывно совершенствуя** свои знания и умения, владение изученным материалом и исследовательской деятельностью.

Приступим к формированию компетентности по БК-2, начнем с изучения теории. Первым этапом является реализация первого шага «Учим мыслям» (автор, как уже отмечено, придерживается принципа: учить и мыслям, и мыслить). Достигается за счет усвоения соответствующей теории и приобретения навыков ее применения на практике.

1. Краткая теория

Пусть А = $\boldsymbol{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 - n -}$ местное натуральное число, где $\boldsymbol{a_i}$ являются цифрами, причем $\boldsymbol{a_n \neq 0}$.

Все сказанное обозначают так

А =$\overline{\boldsymbol{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}}$ – натуральное число.

Необходимо знать следующие признаки делимости целых чисел.

1.1. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{2} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \in \{\mathbf{0, 2, 4, 6, 8}\}$;
1.2. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{3} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a_1} + \dots + \boldsymbol{a_n}) \vdots \mathbf{3}$;
1.3. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{9} \Leftrightarrow (\boldsymbol{a_1} + \dots + \boldsymbol{a_n}) \vdots \mathbf{9}$;
1.4. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{4} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a_2 a_1}} \vdots \mathbf{4}$;
1.5. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{8} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}} \vdots \mathbf{8}$;
1.6. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \vdots \mathbf{5}$;
1.7. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{25} \Leftrightarrow \overline{\boldsymbol{a_2 a_1}} \vdots \mathbf{25}$;
1.8. $\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow (\overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} - \overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}}) \vdots \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{7};\ \mathbf{11};\ \mathbf{13}$;
1.9. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{11} \Leftrightarrow (\Omega_1 - \Omega_2) \vdots \mathbf{11}$, **где** Ω_1 **–** сумма цифр в записи числа А, стоящих на нечетных местах, Ω_2 – сумма цифр в записи числа А, стоящих на четных местах.

Замечание 1. Все эти признаки часто применяются при: а) решении трудных задач ЕГЭ и олимпиадных; б) изучении остальных тем школьного курса математики.

Замечание 2. Все эти признаки сформулированы в математически совершенной форме, т. е. в терминах необходимости и достаточности.

Поэтому доказательство истинности каждого признака состоит из двух частей.

Поясним на примерах:

а) в общем случае Р ⇔ Д;

б) признак **1.6.** $\mathbf{A} \vdots \mathbf{5} \Leftrightarrow \boldsymbol{a_1} \vdots \mathbf{5}$.

Схема доказательства истинности а): первая часть (доказательство необходимости): дано Р, доказать, что имеет место Д; вторая часть (доказательство достаточности):

дано Д, доказать, что имеет место Р.

По этой схеме докажем истинность признака 1.6.

Необходимость. Дано $\mathbf{A} \vdots \mathbf{5}$, доказать, что $\boldsymbol{a_1} \vdots \mathbf{5}$**.** Для этого применим метод от противного. Пусть a_0 не делится на 5. Тогда $a_1 \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6, 7, 8, 9\}$. В этом случае А не делится на 5. Полученное противоречие завершает доказательство.

Аналогично доказывается достаточность.

Замечание 3. Приведем пример признака, указывающего только достаточное условие.

1.10. Докажите, что (37a – 33b) ⋮ 34, если (3a + b) ⋮ 34, где a и b – целые числа.

Здесь требуется доказывать только достаточность. Приступим к решению.

Ясно, что 37a – 33b = 34(a - b) + (3a + b). Каждое слагаемое правой части этого равенства делится на 34, следовательно, и левая часть делится на это число.

Применяя схему а), докажем истинность восьмого и девятого признаков.

1.8. $\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\alpha} \Leftrightarrow (\overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} - \overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}}) \vdots \boldsymbol{\alpha}$, где $\boldsymbol{\alpha = 7;\ 11;\ 13}$.

Необходимость: дано $\mathbf{A} \vdots \boldsymbol{\alpha}$, доказать, что $(\overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} - \overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}}) \vdots \boldsymbol{\alpha}$. Число А представим следующим образом

$$\mathbf{A} = \overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} \cdot \mathbf{1000} + \overline{\overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}}}$$

или

$$\mathbf{A} = \overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} \cdot \mathbf{1001} - (\overline{\boldsymbol{a_n \dots a_4}} - \overline{\boldsymbol{a_3 a_2 a_1}}) \qquad \mathbf{(2)}$$

В равенстве (2) делятся на α левая часть и первое слагаемое. Отсюда следует, что на это число делится и второе слагаемое.

Переходим к доказательству достаточности. В равенстве (2) каждое слагаемое правой части делится на α, поэтому и левая часть – А – делится на α.

Доказательство завершено.

1.9. $\mathbf{A} \vdots \mathbf{11} \Leftrightarrow (\Omega_1 - \Omega_2) \vdots \mathbf{11}$.

Представим следующим образом число

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{a_1 + 10a_2 + 100a_3 + 1000a_4 + \dots = a_1 + (11\,a_2 - a_2) + (99a_3 + a_3) +} \boldsymbol{+(1001a_4 - a_4) + \dots} = (\Omega_1 - \Omega_2) + \mathbf{11 \cdot B},$$

где В – натуральное число.

Получили

$$\mathbf{A} = (\Omega_1 - \Omega_2) + \mathbf{11 \cdot B} \qquad \mathbf{(3)}$$

Из этого равенства следует истинность рассматриваемого признака.

2. Демонстрационные примеры

Пример 1. Докажите, что произведение последовательных: а) трех целых чисел делится на 6; б) четырех целых чисел делится на 24; в) пяти целых чисел делится на 120.

Решения:

а). Пусть А = a(a+1)(a+2) – искомое произведение. Среди этих множителей имеется хотя бы одно четное число. Следовательно, число А делится на 2. Далее, если: a_1) число a делится на 3, то А ⋮ 6; a_2) при делении a на 3 дает остаток 1, то (a+2) ⋮ 3 и А ⋮ 6; a_3) при делении a на 3 дает остаток 2, то (a+1) ⋮ 3 и А ⋮ 6.

Задача а) решена.

б). Пусть А = a(a+1)(a+2)(a+3) – искомое произведение. Среди этих множителей имеются два четных числа, причем одно из них делится на 4. Следовательно, число А делится на 8. Далее, из а) следует, что число А делится на 3. Поэтому А ⋮ 24.

Задача б) решена.

в). Рассуждая так же, как и при решении задачи а), убеждаемся, что искомое произведение А = a(a+1)(a+2)(a+3)(a+4) на 5. Далее, применяя результаты задачи б), приходим к выводу, что А ⋮ 24. Следовательно, А ⋮ 120.

Пример 2. Докажите, что $A = 10^{2026} - 1$ делится на 99.

Решение. Представим число А следующим образом:

$A = 100^{1013} - 1 = (100 - 1)(100^{1012} + 100^{1011} + \dots + 1) = 99 \cdot B$,

где В – натуральное число. Отсюда следует, что А ⋮ 99.

Пример 3. Докажите, что $\overline{xyzabc} \vdots 53 \Leftrightarrow (\overline{abc} - 7 \cdot \overline{xyz}) \vdots 53$.

Решение. Представим число $A = \overline{xyzabc}$ следующим образом:

$A = \overline{xyzabc} = \overline{xyz} \cdot 1000 + \overline{abc} = \overline{xyz} \cdot (53 \cdot 19 - 7) + \overline{abc}$;

$$A = 53 \cdot B + (\overline{abc} - 7 \cdot \overline{xyz}) \qquad (4)$$

Из (4) следует решение данного примера.

Science for Education Today
2026. Том 16. № 1 http://sciforedu.ru ISSN 2658-6762

Пример 4.

Найдите натуральное число А = $\overline{2026xy}$, которое делится на: а) 35; б) 33.

Решите эти задачи двумя способами: первый – на основе признаков делимости; второй – на основе знаний, полученных при изучении первой базисной компетенции БК-1.

Решение а). Первый способ – на основе признаков делимости на 5 и 7 (35 = 5·7). Число А делится на 5 тогда и только тогда, когда у = 0 или у = 5. Теперь применим признак делимости на 7: А ⋮ 7 ⇔ (202 – $\overline{6xy}$) ⋮ 7 ⇔ (398 + 10x + y) ⋮7.

⇔

Или (6 +3x + y) ⋮7. Полученное предложение достоверно при: у = 0 и х = 5; или у = 5 и х = 1 или х = 8.

Ответ: 202650; 202615; 202685.

Второй способ. Данное число представим следующим образом:

А = 202600 + $\overline{xy}$, где 202600 = 5788·35 + 20. Отсюда следует, что А ⋮ 35 ⇔ (20 + $\overline{xy}$) ⋮ 35. Последнее верно при $\overline{xy} \in \{15; 50; 85\}$.

Ответ: такой же.

Пример 5. Найдите все значения цифры a, при которых сумма A=15 + $\overline{3a4}$ делится на: а) 9; б) 8.

Ответ: а) 5; б) нет такой цифры, так как А ⋮ 8 ⇔ (319 + 10a) ⋮ 8, что не осуществимо, примените метод от противного.

3. Задачи для самостоятельного решения

Пример 1. Найдите наименьшее натуральное число $\overline{2026ab}$, которое делится на: а) 33; b) 65; c) 56.

Пример 2. Найдите наибольшее натуральное число $\overline{2027ab}$, которое делится на: а) 35; b) 66; c) 56.

Пример 3. Сколько имеется чисел вида $\overline{2026ab}$, каждое из которых делится на: а) 12; b) 55; c) 39.

Пример 4. Докажите, что: а) $11^{2026} - 1$ делится на 120; б) 333^{2025} ⋮ 37.

Пример 5. Докажите, что число $\overline{abcd}$ тогда и только тогда делится на 101, когда $\overline{ab} = \overline{cd}$.

Пример 6. Найдите четыре натуральных числа, делящихся на 11, в записи которых использованы все цифры, причем только один раз.

Ответ: 986513240, 9873546210, 9576843210, 9875634120.

ЦУ: примените признак делимости на 11 по отношению к числу 9876543210.

4. Творческие задания

4.1. Докажите все оставшиеся недоказанными признаки.

ЦУ: используйте схему а).

4.2. Сочините по одной задаче, аналогичные решенным. Их решения письменно оформите по принятым стандартам.

БК-3 – Деление с остатком

В этом пункте теория состоит только из одного определения.

Определение. Разделить натуральное число a на натуральное число b с остатком – значит найти такие неотрицательные целые числа p и r, что

a= b·p + r, 0 < r < b.

Число r называется остатком, p – неполым частным.

Эта третья базисная компетенция играет важную роль при решении трудных задач текстовых и на целочисленность переменных, в частности задач ЕГЭ и олимпиадных. Решения наиболее важных типов задач приведены ниже.

1. Демонстрационные примеры

Пример 1. В круге находятся 43 камешка. Играют двое по правилу: брать можно: а) от двух до пяти; б) от одного до семи. Выигрывает тот, кто сделал последний ход. Кто выиграет, начавший (первый) или второй?

Решение. а). Разобьем 43 на семерки с остатком: 43 = 7·6 + 1. На круге находятся 7 кучек: в одном кучке – один камешек, остальные шесть кучек содержат по 7 камешков. Первый не имеет права брать один камешек, поэтому вынужден брать их из какой-нибудь кучки с семью камешками, соблюдая правила. Второй берет оставшиеся камешки этой кучки и т. д. (имеет право).

Ответ: выигрывает второй.

б). Решите самостоятельно. ЦУ: разбивайте на восьмерки 8 = 1 + 7.

Ответ: выигрывает первый.

Пример 2. Можно ли получить 2026 кусков из целого листа бумаги, если каждый раз разрешается рвать один из уже имеющихся кусков (или листа в начале) на: а) 5 частей; б) 6 частей; в) 7 частей?

Ответ: а) нельзя; б) можно; в) нельзя.

Решение: 1) каждый раз при разрыве на n частей число кусков увеличивается n -1 кусков, так как один кусок расходуется при следующем разрыве; 2) первый процесс начинается с 1 (с одного листа). Следовательно, при делении 2026 на n-1 остаток должен быть равным 1. Это имеет место при

n = 6: 2026 = 5· 405 + 1,

но не имеет места при других значениях n.

Пример 3. Среди любых n + 1 натуральных чисел существуют два числа, имеющие одинаковые остатки при делении на n.

Пример 4. Имеет ли решение в целых числах уравнение

$3x^2 - 4y^2 = a$ ($a \in$\{ 2025, 2026, 2027\})?

Примечание. Основными методами решения задач на целочисленность являются деление чисел с остатком и разбиение задачи на части (расчленение) или их комбинация. На примере решения данной задачи продемонстрируем сказанное.

Решение. 1. При делении числа a на 4 получаются следующие остатки 2025 = 4·506 + 1; 2026 = 4·506 + 2; 2027 = 4·506 + 3.

Следовательно, если уравнение имеет решение, то при указанной операции выражение $3x^2$ дает такой же остаток, что и соответствующее значение числа a. При делении на 4 остатками являются для числа x^2: 0 и 1; для $3x^2$: 0 и 3 (проведено расчленение – второе слагаемое исключено из рассмотрения за счет деления на 4 и учтены остатки при делении на 4 первого слагаемого). Отсюда следует, что первые два уравнения не имеют решения в целых числах, возможно имеет решение третье уравнение:

$$3x^2 - 4y^2 = 2027 \qquad (1)$$

Это уравнение достойно серьезного внимания. Есть три способа решения таких уравнений: перебор (очень громоздкий), еще раз обратиться к делению с остатком, тем более начало уже есть. Выше отмечено, уравнение (1) может иметь решение, если при делении на 4 число x^2 дает в остатке 1. Тогда $x = 4k \pm 1$ (возможно появление посторонних решений, отсеем проверкой). В этом случае уравнение (1) имеет вид:

$3(16k^2 8 \pm k) + 3 - 4y^2 = 4{\cdot}506 + 3 \Leftrightarrow 3{\cdot}(4k^2 \pm 2k) - y^2 = 506 \Leftrightarrow$

$3{\cdot}(2k^2 \pm k) - 2z^2 = 253$, где y=2z.

Полученное уравнение имеет решение только при нечетных значениях k. В этом случае число $2k^2 k$ является нечетным, обозначим его так (применяется упрощающая подстановка):

$$2k^2 \pm k = 2\lambda + 1 \qquad (2)$$

Тогда получим уравнение

$3\lambda = z^2 + 125$ (3)

Уравнение (3) можно решить перебором (очень громоздким): $z^2 = 400$, $z = 20, y = 40$, $\lambda = 175$. Из уранения (2) получим $k = 13$, далее x = 53. Такой длинный путь решения этой очень серьезной задачи. Но есть еще третий путь: расчленить задачу на две части напрямую, без деления с остатком, включив сообразительность.

Идея:

пусть второе слагаемое уравнения (1) не влияет на 27 (десятки и единицы числа 2027) (4)

Опишем эту идею на языке математики (оматематизируем): из (4) следует, что:

1) переменная y = $\overline{a0}$ = 10a;

2) последняя цифра x^2 равна 9, поэтому x=$\overline{b3}$, $x^2 = b^2 \cdot 100 + 2 \cdot 10b \cdot 3 + 9$,

причем число x^2 не должно иметь десятков, т. е. 2b = 10, b = 5, x = 53. Тогда $3x^2 = 8427$. Сравнивая полученное число с 2027, приходим к выводу

$4y^2 = 4 \cdot 100a^2 = 6400, a^2 = 16, a = 4$, y =40.

Ответ: x = 53, y = 40.

Пример 5. Найдите 16 целочисленных решений уравнения

$3x^2 - y^2 + 4z^2 = 2010$ (1)

Решение. Если данное уравнение имеет решение, то при делении на 4 обе части этого уравнения должны давать одинаковые остатки. Правая часть 2010 = 4 · 502 + 2 дает остаток, равный 2.

Числа x^2 и y^2 при указанной операции дают остатками 0 или 1, число $3x^2$: 0 или 3; -y^2: 0 или -1. Отсюда следует, если x = 4k $\pm$ 1 и y =4n $\pm$ 1 (k, n – целые числа), то

$3x^2 - y^2 = 4\lambda + 2$, (2)

т. е. возможно уравнение имеет решение. Тогда (1) имеет вид:

$4\lambda + 2 + 4z^2 = 4 \cdot 502 + 2 \Leftrightarrow$

$\lambda + z^2 = 502.$ (3)

Получили простое уравнение, которое легко решить методом подбора.

Пусть $z^2 = 22^2$.

Тогда λ = 18, уравнение (2) имеет вид $3x^2 - y^2 = 74$.

Отсюда следует: при y^2= 1 значение x^2= 25. Тем самым найдено одно решение x = 5, y = 1, z = 22. Остальные 15 решений легко получить за счет замены знаков «+» и «-».

Пример 6. В магазине было 5 ящиков с гвоздями весом в 7, 8, 11, 12, 14 кг. Два покупателя взяли 4 ящика наибольшего общего веса, причем с отношением весов 2:3. Какой ящик остался в магазине?

Решение. Пусть 2x кг гвоздей купил первый покупатель, тогда 3x кг купил второй. Следовательно, всего куплено 5x кг гвоздей, поэтому суммарный вес купленных 4 ящиков делится на 5.

Рассмотрим остатки чисел

7, 8, 11, 12, 14 при делении на 5:

2, 3, 1, 2, 4 остатки (1)

Из (1) следует, что куплено 4 ящика с номерами либо 1, 2, 3, 5; либо 4, 2, 3, 5. По условию задачи требуется наибольший общий вес. Поэтому куплена вторая четверка ящиков, в магазине остался первый ящик.

Ответ: первый ящик.

Пример 7 (ЕГЭ, 2015). На доске написано не обязательно различных двузначных чисел без нулей в десятичной записи. Сумма этих чисел равна 572. Затем в каждом числе поменяли местами первую и вторую цифры. Найдите наибольшее возможное значение суммы получившихся чисел и укажите эти числа.

Решение. Представим 572 = 19·29 + 21. Тогда наибольшее значение суммы получившихся чисел равно 91·29 + 12 = 2651 – это ответ на первый вопрос. Ответ на второй: получившимися числами являются: 12 и 91, повторенное 29 раз.

2. Задачи для самостоятельного решения

1. Решите в целых числах уравнение 3у = 2025 – x^2.

   Ответ: х = 3k, у = 675 – 3k^2, k ∈Z.

2. Докажите, что из n последовательных целых чисел только одно делится на n.

3. Обоснуйте некорректность утверждения: если $(a^3 + b^3) \vdots 3,$ то $a^3 \vdots 3$ и $b^3 \vdots 3$.

ЦУ: достаточно привести контрпример, например, не делящихся на 3 чисел а = 3k + 1 и b = 3m – 1. Вы придумайте свой контрпример.

4. Докажите, что в целых числах уравнение $3x^2 - y^2 - 4\,z^2 = 2027$ имеет не менее 16 решений.

ЦУ: 1) делением на 4 обеих частей данного уравнения убедитесь, что уравнение имеет решение, если *у* делится на 4, а число x^2 дает в остатке 1 (число х: остаток + или – единица, возможно появление постороннего решения, устраните проверкой), 2) примените упрощающую вычисления подстановку (см. пример 5).

Ответ: основные: (27, 4, 6); (27, 12, 2), остальные за счет смены знаков.

5. В магазине было 7 ящиков с гвоздями весом в 7, 8, 11, 12, 13, 14, 15 кг. Трое покупателей взяли 5 ящиков, причем с отношением весов 1:2:3. Какие ящики остался в магазине?

3. Творческие задания

1. Обобщите условие задачи Примера 1 и исследуйте проблему о победителе.

2. Обобщите условие задачи Примера 2 и исследуйте проблему о возможности разбиения листа на n частей.

3. Докажите, что уравнение $3x^2 - y^2 - 4z^2$ = 2027 имеет 32 целочисленного решения. Найдите наибольшее число целочисленных решений этого уравнения.

4. Обобщите условие задачи Примера 6 и разработайте алгоритм решения полученной задачи.

5. Обобщите условие задачи Примера 7 и разработайте алгоритм решения полученной задачи.

Заключение

1. Теория и технология КП компактна и доступна. Предложенный по математике подход применим и для многих других дисциплин.

2. Практика применения КП в учебном процессе вызывает определенные трудности. Это связано с тем, что КП предназначен для того, чтобы обучающийся умел думать и творить – это первая трудность; вторая – обеспечение компетентности требует учета всех характеристик изучаемого объекта. Такую трудную практику целесообразно реализовать на основе деятельностного подхода.

3. Благородному делу поможет регулярно действующий обучающий семинар учителей и учащихся. «Овчина стоит выделки», так как за КП будущее. Это будет способствовать решению глобальной поставленной Президентом проблемы: развивать качественную экономику, опережающую зарубежную, – и успеху начавшегося в стране движения: дать одаренным отличникам специальное образование. Автор готов участвовать в этом деле.

4. Статья содержит обучающие аспекты: даны с решениями задачи высокого уровня трудности и разнообразные методы их решения, поэтому полезна и учащимся 5–11 классов. Усвоение таких материалов будет способствовать повышению качества математического образования и содействовать успеху учащихся, детей с ограниченными возможностями здоровья и участников СВО на ЕГЭ, олимпиадах и конкурсах.

Целесообразно опубликовать такие материалы по всем темам школьной математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жафяров А. Ж. Модели и критерии для мониторинга качества образования // Science for Education Today. – 2021. – № 4. – С. 136–154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2104.07
2. Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D. An ontology-based for competence management // Data and Knowledge Engineering. – 2017. – Vol. 107. – P. 51–66. DOI: https://doi.org/10./1016./j.datak.2016.12.001
3. Guerrero Chanduví D. A., Girón Escobar C., Jara Gallo D., Cruz Alayza V. Analysis of the Intellectual Structure of Scientific Papers about Professional Competences Related to Organizational Psychology // Procedia – Social and Behavioral Sciences. – 2016. – Vol. 226. – P. 286–293. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2016.06.190
4. Латуха О. А. Обучение менеджменту устойчивого развития руководителей организации // Вестник Новосибирского государственного педагогического университета. – 2018. – Т. 8, № 3. – С. 225-236. DOI: https://doi.org/10.15293/2226-3365.1803.16
5. Bilal, Guraya S. Y., Chen S. The impact and effectiveness of faculty development program in fostering the faculty's knowledge, skills, and professional competence: A systematic review and meta-analysis // Saudi Journal of Biological Sciences. – 2019. – Vol. 26. – P. 688–697. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sjbs.2017.10.024
6. Hašková A., Lukáčová D., Noga H. Teacher self-assessment as a part of quality management // Science for Education Today. – 2019. – Vol. 9, No. 2. – P. 156-169. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.1902.11
7. Pijl- Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V. Competence and competency-based nursing education: Finding our waythrough the issues // Nurse Education Today. – 2014. – Vol. 34 (5). – P. 676–678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
8. Gravina E. W. Competency-Based Education and Its Effect on Nursing Education: A Literature Review // Teaching and Learning in Nursing. – 2017. – Vol. 12 (2). – P. 117–121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016/11.004
9. Жафяров, А. Ж. Компетентностный подход: непротиворечивая теория и технология // Science for Education Today. – 2019. – Т. 9, № 2. – С. 81-95. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.1902.06
10. Пушкарев Ю. В., Пушкарева Е. А. Цифровые трансформации системы образования: тенденции, проблемы, приоритеты личностного развития (обзор) // Science for Education Today. – 2025. – Т. 15, № 6. – С. 71–96. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2506.04
11. Пушкарева Е. А., Пушкарев Ю. В. Когнитивно-рефлексивное развитие личности: оценка особенностей воздействия изменяющейся информационно-образовательной среды // Science for Education Today. – 2024. – Т. 14, № 6. – С. 128–154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2406.06
12. Lomonosova N. V., Zolkina A. V. Digital learning resources: Enhancing efficiency within blended higher education // Novosibirsk State Pedagogical University Bulletin. – 2018. – Vol. 8 (6). – P. 121-137. DOI: https://doi.org/10.15293/2226-3365.1806.08
13. Brevik L. M., Gudmundsdottir G. B., Lund A., Strømme T. A. Transformative agency in teacher education: Fostering professional digital competence // Teaching and Teacher Education. – 2019. – Vol. 86. – P. 102875. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.07.005

14. Instefjord E. J., Munthe E. Educating digitally competent teachers: A study of integration of professional digital competence in teacher education // Teaching and Teacher Education. – 2017. – Vol. 67. – P. 37–45. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.05.016
15. Gadušova Z., Haškova A., Szarszoi D. Teachers` competences evaluation: Case study // Science for Education Today. – 2020. – Vol. 10 (3). – P. 164–177. DOI: https://doi.org/10.15293/2658-6762.2003.09
16. Cheetham G., Chivers G. The reflective (and competent) practitioner: a model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches // Journal of European Training. – 1998. – Vol. 22 (7). – P. 267–276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678
17. Stefanutti L., de Chiusole D. On the assessment of learning in competence-based knowledge space theory // Journal of Mathematical Psychology. – 2017. – Vol. 80. – P. 22–32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp/2017.08.003
18. Rezgui K., Mhiri H., Ghedira K. Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development // Procedia Computer Science. – 2017. – Vol. 112. – P. 397–406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041
19. Lauermann F., König J. Teachers' professional competence and wellbeing: Understanding the links between general pedagogical knowledge, self-efficacy and burnout // Learning and Instruction. – 2016. – Vol. 45. – P. 9–19. DOI: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.06.006
20. Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L. Architecture of a Competence – Based Human Resource Development Solution // Procedia Computer Science. – 2015. – Vol. 77. – P. 184–190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382
21. Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch. Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice // Evaluation and Program Planning. – 2015. – Vol. 52. – P. 1–9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001
22. Schipper T., Goei S. L., de Vries S., van Veen K. Professional growth in adaptive teaching competence as a result of Lesson Study // Teaching and Teacher Education. – 2017. – Vol. 68. – P. 289–303. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.09.015
23. Жафяров А. Ж. Критерий для исследования зависимых и независимых выборок в области образования // Science for Education Today. – 2022. – № 3. – С. 69–91. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2203.04
24. Жафяров А. Ж. Уточненный и дополненный критерий для исследования зависимых и независимых выборок в области экспериментальных наук (и образования) // Science for Education Today. – 2023. – Т. 13, № 2. – С. 123–144. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2302.06

Поступила: 29 ноября 2025 Принята: 10 января 2026 Опубликована: 28 февраля 2026

Заявленный вклад автора:

Вклад автора в сбор эмпирического материала представленного исследования, обработку данных и написание текста статьи полноценный.

Автор ознакомился с результатами и одобрил окончательный вариант рукописи.

Информация о конфликте интересов:

Автор декларирует отсутствие явных и потенциальных конфликтов интересов в связи с публикацией данной статьи

Информация об авторе

Жафяров Акрям Жафярович
доктор физико-математических наук, профессор,
член-корреспондент РАО,
кафедра геометрии и методики обучения математике,
Новосибирский государственный педагогический университет,
Вилюйская ул., 28, 630126, Новосибирск, Новосибирская обл., Россия.
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1339-1472
E-mail: akram39@yandex.ru

Science for Education Today

2026, vol. 16, issue 1 http://en.sciforedu.ru/ ISSN 2658-6762

DOI: 10.15293/2658-6762.2601.07 Research Full Article / Article language: Russian

Studying the school mathematics course based on the competence approach

Akryam Zh. Zhafyarov [1]

[1] Novosibirsk State Pedagogical University,
Novosibirsk, Russian Federation

Abstract

Introduction. *The article discusses the problem of improving the quality of mathematical education in secondary schools. The purpose of the study is to build school mathematics course based on the competence approach developed and refined by the author, to demonstrate what has been said using the example of the first three basic competencies of the 'Divisibility of integers' topic.*

Materials and Methods. *The basis of the methodology is the integration of the author's consistent theory and technology about the competence approach and long-term practice in teaching this topic.*

Results. *Many students trained using this technology have become worthy citizens of Russia, doctors of sciences and professors. The expediency of choosing this topic is due to the following circumstances: it causes great difficulties for teachers (not only Russian ones), students of pedagogical universities and, as a result, for high school students who lose points on the Unified State Exam; there are almost no textbooks capable of solving this problem.*

Conclusions. *The introduction of a competence-based approach into the process of studying school mathematics will help improve the quality of mathematical education and personal development of students, thereby contributing to preparing future professionals to solve the significant problem posed by the President of the country: to develop the Russian economy ahead of the foreign ones.*

Keywords

Competency; Competence; Competence approach; Integration of theory and practice.

Acknowledgments

The study was financially supported by the Ministry of Education of the Russian Federation by a state assignment. Project No. 073-03-2025-062/1 ("The content and technology of teaching schoolchildren with difficulties in learning mathematics at school").

For citation

Zhafyarov A. Zh. Studying the school mathematics course based on the competence approach. *Science for Education Today*, 2026, vol. 16 (1), pp. 160–180. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2601.07

Corresponding Author: Akryam Zh. Zhafyarov, akram39@yandex.ru

REFERENCES

1. Zhafyarov A. Z. Models and criteria for monitoring the quality of education. *Science for Education Today*, 2021, vol. 11 (4), pp. 136-154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2104.07
2. Miranda S., Orciuoli F., Loia V., Sampson D. An ontology-based model for competence management. *Data and Knowledge Engineering*, 2017, vol. 107, pp. 51-66. DOI: https://doi.org/10.1016/j.datak.2016.12.001
3. Guerrero Chanduví D. A., Girón Escobar C., Jara Gallo D., Cruz Alayza V. Analysis of the intellectual structure of scientific papers about professional competences related to organizational psychology. *Procedia – Social and Behavioral Sciences*, 2016, vol. 226, pp. 286-293. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2016.06.190
4. Latuha O. A. Training leaders of organizations in sustainable development management. *Novosibirsk State Pedagogical University Bulletin*, 2018, vol. 8 (3), pp. 225-236. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1803.16
5. Bilal, Guraya S. Y., Chen S. The impact and effectiveness of faculty development program in fostering the faculty's knowledge, skills, and professional competence: A systematic review and meta-analysis. *Saudi Journal of Biological Sciences*, 2019, vol. 26, pp. 688-697. DOI: https://doi.org/10.1016/j.sjbs.2017.10.024
6. Hašková A., Lukáčová D., Noga H. Teacher's self-assessment as a part of quality management. *Science for Education Today*, 2019, vol. 9 (2), pp. 156-169. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.1902.11
7. Pijl-Zieber E. M., Barton S., Konkin J., Awosoga O., Caine V. Competence and competency-based nursing education: Finding our way through the issues. *Nurse Education Today*, 2014, vol. 34 (5), pp. 676-678. DOI: https://doi.org/10.1016/j.nedt.2013.09.007
8. Gravina E. W. Competency-based education and its effect on nursing education: A literature review. *Teaching and Learning in Nursing*, 2017, vol. 12 (2), pp. 117-121. DOI: https://doi.org/10.1016/j.teln.2016.11.004
9. Zhafyarov A. Z. Competence approach: Consistent theory and technology. *Science for Education Today*, 2019, vol. 9 (2), pp. 81-95. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.1902.06
10. Pushkarev Y. V., Pushkareva E. A. Digital transformations of the education system: Trends, problems, and priorities of personal development (A critical review). *Science for Education Today*, 2025, vol. 15 (6), pp. 71-96. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2506.04
11. Pushkareva E. A., Pushkarev Y. V. Cognitive-reflexive personality development: Evaluating the impact of the changing information and educational environment. *Science for Education Today*, 2024, vol. 14 (6), pp. 128-154. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2406.06
12. Lomonosova N. V., Zolkina A. V. Digital learning resources: Enhancing efficiency within blended higher education. *Novosibirsk State Pedagogical University Bulletin*, 2018, vol. 8 (6), pp. 121-137. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2226-3365.1806.08
13. Brevik L. M., Gudmundsdottir G. B., Lund A., Strømme T. A. Transformative agency in teacher education: Fostering professional digital competence. *Teaching and Teacher Education*, 2019, vol. 86, pp. 102875. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2019.07.005
14. Instefjord E. J., Munthe E. Educating digitally competent teachers: A study of integration of professional digital competence in teacher education. *Teaching and Teacher Education*, 2017, vol. 67, pp. 37-45. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.05.016

15. Gadušova Z., Hašková A., Szarszoi D. Teachers` competences evaluation: Case study. *Science for Education Today*, 2020, vol. 10 (3), pp. 164-177. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2003.09
16. Cheetham G., Chivers G. The reflective (and competent) practitioner: A model of professional competence which seeks to harmonise the reflective practitioner and competence-based approaches. *Journal of European Industrial Training*, 1998, vol. 22 (7), pp. 267-276. DOI: https://doi.org/10.1108/03090599810230678
17. Stefanutti L., de Chiusole D. On the assessment of learning in competence based knowledge space theory. *Journal of Mathematical Psychology*, 2017, vol. 80, pp. 22-32. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmp.2017.08.003
18. Rezgui K., Mhiri H., Ghédira K. Ontology-based e-Portfolio modeling for supporting lifelong competency assessment and development. *Procedia Computer Science*, 2017, vol. 112, pp. 397-406. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2017.08.041
19. Lauermann F., König J. Teachers' professional competence and wellbeing: Understanding the links between general pedagogical knowledge, self-efficacy and burnout. *Learning and Instruction*, 2016, vol. 45, pp. 9-19. DOI: https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.06.006
20. Judrups J., Zandbergs U., Arhipova I., Vaisnore L. Architecture of a competence – based human resource development solution. *Procedia Computer Science*, 2015, vol. 77, pp. 184-190. DOI: https://doi.org/10.1016/j.procs.2015.12.382
21. Bergsmann E., Schultes M.-Th., Winter P., Schober B., Spiel Ch. Evaluation of competence-based teaching in higher education: From theory to practice. *Evaluation and Program Planning*, 2015, vol. 52, pp. 1-9. DOI: https://doi.org/10.1016/j.evalprogplan.2015.03.001
22. Schipper T., Goei S. L., de Vries S., van Veen K. Professional growth in adaptive teaching competence as a result of Lesson Study. *Teaching and Teacher Education*, 2017, vol. 68, pp. 289-303. DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.09.015
23. Zhafyarov A. Z. Criteria for studying dependent and independent samples in the field of education. *Science for Education Today*, 2022, vol. 12 (3), pp. 69-91. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2203.04
24. Zhafyarov A. Zh. Refined and supplemented author's criterion for the study of dependent and independent samples in the field of experimental sciences (with the focus on education). *Science for Education Today*, 2023, vol. 13 (2), pp. 123-144. DOI: http://dx.doi.org/10.15293/2658-6762.2302.06

Submitted: 29 November 2025 Accepted: 10 January 2026 Published: 28 February 2026

2026, vol. 16, issue 1 http://en.sciforedu.ru/ ISSN 2658-6762

The authors' stated contribution:

The author's contribution to the collection of empirical material of the presented research, data processing and writing of the text of the article is full-completed.

The author reviewed the results and approved the final version of the manuscript

Information about competitive interests:

The author declares the absence of obvious and potential conflicts of interest in connection with the publication of this article

Information about the Author

Akryam Zhafyarovich Zhafyarov
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Corresponding Member of the Russian Academy of Education,
Department of Geometry and Methods of Teaching Mathematics,
Novosibirsk State Pedagogical University,
28 Vilyuiskaya Str., 630126, Novosibirsk, Russian Federation.
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1339-1472
E-mail: akram39@yandex.ru